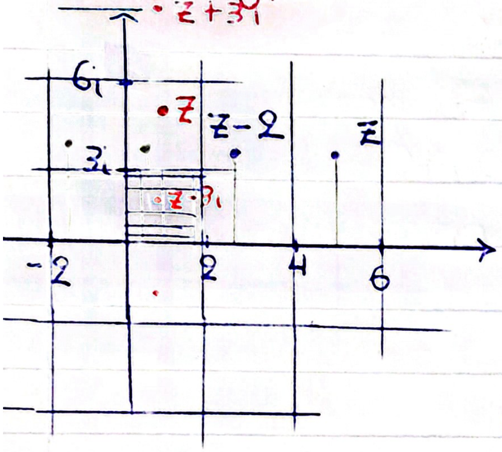
16/05/16

1^{o} θ. Cauchy - Liouville

Αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακεραια λ φραγμενη $\Rightarrow f =$ σταθερη

παραδειγμα: $\exists f$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ τ.ω $f(z+3i) = f(z-2) = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$



Αν χωρισω το επιπεδο σε λωριδες οι κατακόρυφες μου δίνουν το συνολο των σημειων στα οποια η f επαναλαμβάνεται

στο 1^{o} ορθογώνιο βρισκω ολες τις τιμές της f

$$f(z+3i) = f(z)$$

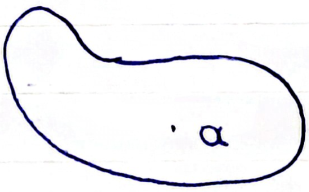
$R(z) = \{ f(z) : z = x + yi ,\ 0 \leq x \leq 2 \ \&\ 0 \leq y \leq 3 \}$ ειναι φραγμενο

$\Rightarrow |f(z)| \leq M$ φραγμενη $\Rightarrow$ (Cauchy) $f =$ σταθερη

- Οι τριγωνομετρικές $\eta\mu(z+2\pi) = \eta\mu(z)$, $\eta\mu(z-2\pi) = \eta\mu(z)$ ειναι συναρτησεις που ικανοπ. την παραπ. μορφ

- Μια άλλη $f(z+\beta i) = f(z)$ που ικανοποιεί την περιοδικότητα ως προς τον φανταστικό αξονα ειναι:

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z}$$

f 

$\mathcal{E} \to \mathbb{C}$

Αν $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = 0$

$$f(z) = \sum \frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!} (z-\alpha)^{\kappa}$$

Αν ειναι $f(\alpha) = 0$ τοτε το α ειναι ριζα της f.

Αν $f \not\equiv 0$ τοτε $\sum_{\kappa=0}^{+\infty} \alpha_{\kappa} (z-\alpha)^{\kappa} = f(z)$ δεν είναι όλοι οι οροι 0.

$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{v-1} = 0 \quad , \alpha_v \neq 0$. τοτε ειναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (z-\alpha)^k = \alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \dots + \alpha_{v-1}(z-\alpha)^{v-1} + \alpha_v (z-\alpha)^v + \dots$$

$$= \alpha_v (z-\alpha)^v + \alpha_{v+1}(z-\alpha)^{v+1} + \dots$$

$$= (z-\alpha)^v \underbrace{[\alpha_v + \alpha_{v+1}(z-\alpha) + \dots]}_{g(z)}$$

οπου $g(z)$: δυναμοσειρ

$$g(\alpha) = \alpha_v \neq 0$$

Συνεπώς οταν το α: ριζα της f τοτε

$\exists v \geq 1 : \ f(z) = (z-\alpha)^v g(z) \ , \ g(\alpha) \neq 0$

οπου v: πολλαπλότητα της ριζας

ν $f(\alpha) = 0$

$$f'(z) = v(z-\alpha)^{v-1} g(z) + (z-\alpha)^v g'(z)$$

$$f''(z) = v(v-1)(z-\alpha)^{v-2} g(z) + 2v(z-\alpha)^{v-1} g'(z) + (z-\alpha)^v g''(z)$$

$\vdots$

$$f^{(v)}(z) = v!\, g(z) + (z-\alpha)\dots$$

$$f^{(v)}(\alpha) = v!\, g(\alpha) \neq 0$$

στην ν-οστή παραγωγο στην τιμή α δε μηδενιζεται

Παραδειγμα: εστω $f(z) = z^2 - (\eta\mu z)^2$

τοτε $f'(z) = 2z - \eta\mu(2z)$, $f'(0) = 0$ $(2\eta\mu z \sigma\upsilon\nu z = \eta\mu 2z)$

$f''(z) = 2 - 2\sigma\upsilon\nu(2z)$, $f''(0) = 0$

$f'''(z) = 4\eta\mu(2z)$, $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(z) = 8\sigma\upsilon\nu(2z)$ $\quad f^{(4)}(0) = 8 \neq 0$

Αρα $\boxed{f(z) = z^4 g(z)}$

παιρνω το 0 μία ριζα της αρχικής

Για να βρω την $g(z)$: $\quad f(z) = z^2 - (\eta\mu z)^2 =$

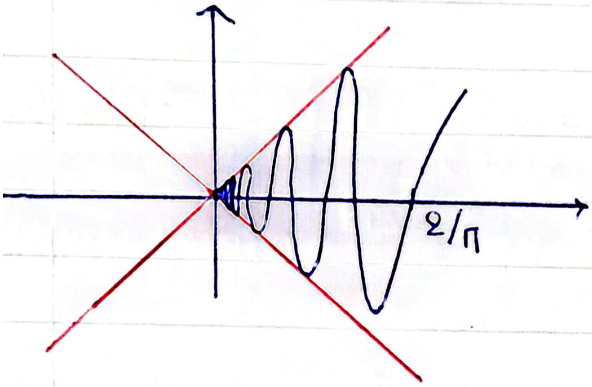
$$z^2 - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots\right)^2 = z^2 - \left(z^2 + \frac{z^6}{(3!)^2} + \frac{z^{10}}{(5!)^2} + \dots + \right.$$

$$\left. - 2\frac{z^4}{3!} + 2\frac{z^6}{5!} \dots \right) =$$

$$= \frac{z^4}{3} - \left(\frac{z^6}{(3!)^2} - \frac{2z^6}{5!} \right) + \dots = z^4 \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \dots \right)}_{g(z)}$$

- **Ιδιότητες ριζών**

Παράδειγμα: Έστω $\varphi(x) = x\,\eta\mu\frac{1}{x}$

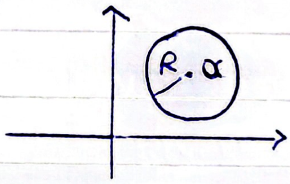


$\exists x_\nu \to 0 : \varphi(x_\nu) = 0$

↳ ακολουθία ριζών

- Έστω $\alpha_\nu \to \alpha$ $f(\alpha_\nu) = 0$ και $f \neq 0$, δηλ $\exists f$: ολομορφη που $f(\alpha_\nu) = 0$ και η ακολουθία $\alpha_\nu \to \alpha$;;;

$f(\alpha) = f(\lim \alpha_\nu) = \lim f(\alpha_\nu) = 0$



δηλ $z \in B(\alpha, R)$.

Σ' αυτόν το δίσκο είναι $f(z) = (z-\alpha)^k g(z)$, $g(\alpha) \neq 0$

$\exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu \in B(\alpha, R)$

Θα έχω $f(\alpha_\nu) = \underbrace{(\alpha_\nu - \alpha)^k \, g(\alpha_\nu)}_{} = 0$

↳ κάποιος από αυτούς είναι 0

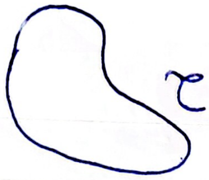
$\Rightarrow g(\alpha_\nu) = 0$ άτοπο

- Αν $f : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ (ολόμορφη) & $\exists \alpha_\nu \in \mathcal{C} : \alpha_\nu \to \alpha \in \mathcal{C}$ & $f(\alpha_\nu) = 0 \Rightarrow f = 0$

- Αν $f_1, f_2 : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη $\exists \alpha_\nu \in \mathcal{C} : \alpha_\nu \to \alpha \in \mathcal{C}$

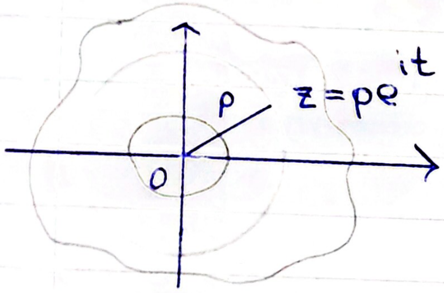
$f_1(\alpha_\nu) = f_2(\alpha_\nu) \Rightarrow \boxed{f_1 = f_2}$

Αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων

$f:$  $\mathcal{C}\to\mathbb{C}$

$|f(z)|, z\in\mathcal{C}$, η f παίρνει ελάχιστο & μέγιστο
το $\sup\limits_{z\in\mathcal{C}}|f(z)|$ $\to$ θα είναι στο σύνορο ή στο εξωτερικό.

$f(z)=z+z^2$ Αρχή μεγίστου



$$\max|f(z)| = \max_{t\in[0,2\pi]} |f(\rho e^{it})| = \rho(1+\rho)$$

αφού:

$$f(\rho e^{it}) = \rho e^{it} + \rho^2 e^{2it} = \rho(\sigma\upsilon\nu t + i\eta\mu t) + \rho^2(\sigma\upsilon\nu(2t) + i\eta\mu(2t)) = \rho(\sigma\upsilon\nu t + \rho\sigma\upsilon\nu(2t)) + i\rho(\eta\mu t + \rho\eta\mu 2t)$$

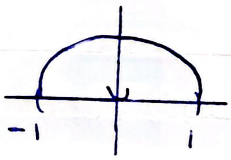
$$|f(\rho e^{it})|^2 = \rho^2(\sigma\upsilon\nu t + \rho\sigma\upsilon\nu(2t))^2 + \rho^2(\eta\mu t + \rho\eta\mu(2t))^2 =$$
$$= \rho^2(1+\rho^2 + 2\rho(\sigma\upsilon\nu t\cdot\sigma\upsilon\nu(2t) + \eta\mu t\cdot\eta\mu(2t)) =$$
$$= \rho^2(1+\rho^2+2\rho\,\sigma\upsilon\nu(t)) \le \rho^2(1+\rho^2+2\rho) = \rho^2(1+\rho)^2$$

Άρα το μέγιστο αυτής της συνάρτησης είναι $\rho\cdot(1+\rho)^2$

Αν $f:\mathcal{C}\to\mathbb{C}$ & $A\subseteq\mathcal{C}$ ανοικτό
f: ολόμορφη
$\Big\}\Rightarrow f(A)$ ανοιχτό

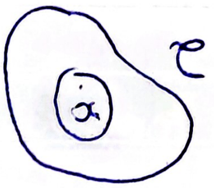
Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης

Έστω $\varphi(x)=1-x^2$



$(0,1]$

Ιδιότητες: Έστω $\alpha\in\mathcal{C}$ και τι σχέση έχει το α με την $f:\mathcal{C}\to\mathbb{C}$



- α ρίζα: $f(z)=(z-\alpha)^k g(z)$, $g(\alpha)\neq 0$
- $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)=\infty$

$\forall M>0\ \exists \rho_M>0: |f(z)|\ge M\ \forall z: 0<|z-\alpha|<\rho_M$

για $M=1$ $\quad F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, $z\in B(\alpha,\rho_1)$

$\lim_{z\to a} F(z)=0$. στο κεντρο ειναι φραγμενη, σε ολο το δισκο ειναι ολόμορφη

$F(a)=0$ $\quad F(z)=(z-a)^{K} g(z)$, $g(a)\neq 0$

$\boxed{f(z)=(z-a)^{-K} g_1(z)}$, $g_1(z)$ ολόμορφη

οταν βλεπω οτι η f εχει αυτή τη μορφη, τοτε το α ειναι σημειο που απειρίζεται η f.

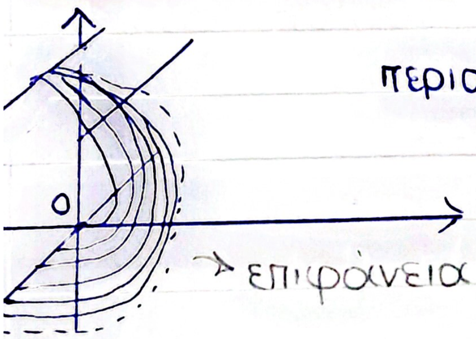
παραδειγμα: $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(\eta\mu z)^2}$, $z\neq 0$

$\lim_{z\to 0} f(z)=\infty$ επομενως το 0 ειναι πόλος

$f(z)=z^{-4}g(z)$ (απο προηγουμενο παράδειγμα)

παραδειγμα $f(z)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu z}{z^2-(\eta\mu z)^2}=\dfrac{z^2\cdot h_1(z)}{z^4\cdot h_2(z)}=z^{-2}h(z)$

Ουσιωδώς ανώμαλο σημείο α οταν $\nexists \lim_{z\to a} f(z)$



περιστρεφεται

καθε σημειο του δίσκου εχει εικόνα πανω στην επιφανεια αυτή.

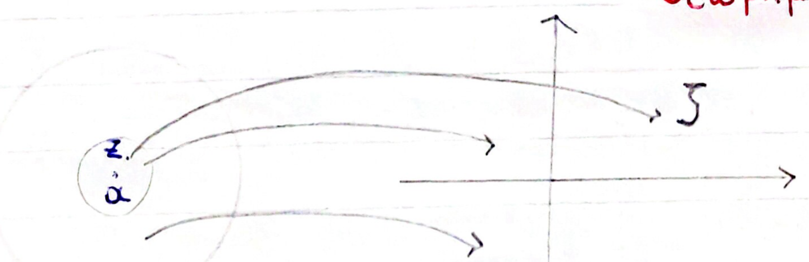
$\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\Delta$

$\forall\, l\in[0,1]$ $\quad \exists (x_\nu,y_\nu)\to(0)$

$\varphi(x_\nu,y_\nu)\to l$

$R(\varphi)=[0,1]$

Θεωρημα Casorrati-Weierstra



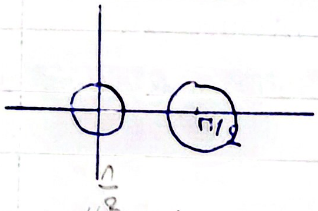
$\forall \zeta\in\mathbb{C}\ \forall\rho>0\ \exists z\in B_0(a,\rho$

$f(z)=\zeta$

$\boxed{R(f)=\mathbb{C}}$

παραδειγμα: $f(z)=\frac{1}{ημz} = z^{-1}\underbrace{\frac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-+}}_{g(z)}$

το 0 ειναι πόλος



το $\frac{\pi}{2}$ ειναι σημείο ολομορφίας

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{ημ\frac{\pi}{2}}=1\neq 0$ και f ολομορφη θα ειναι $f(z)\neq 0 \ \forall z\in B(\frac{\pi}{2},\varepsilon)$

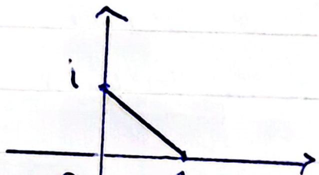
παραδειγμα 6.3.1 σελ.185 Να βρεθει το αναπτυγμα Taylor με κεντρο το $\alpha=1$ στο δισκο $B(1,1)$ της συνάρτησης με τυπο $f(z)=\frac{i}{z^2-iz}$

Λυση

$z^2-iz=z(z-i)$

$z=0,\ z=i$

f οριζεται στο $\mathbb{C}\setminus\{0,i\}$



$r=\inf\{|1-0|,|1-i|\}=\inf\{1,\sqrt{2}\}=1$

Η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor $B(1,1)$

$$\frac{1}{z^2-iz}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-i} \Rightarrow \frac{1}{z^2-iz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}$$

$\sum w^\nu=\frac{1}{1-w},\ |w|<1,\ z\in B(1,1)\quad |z-1|<1$

$$-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-1+1}=-\frac{1}{1-(-(z-1))}=-\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu(z-1)^\nu=\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^{\nu+1}(z-1)^\nu$$

$|-(z-1)|=|z-1|<1$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-1+1-i}=\frac{1}{1-i}\frac{1}{\frac{z-1}{1-i}+1}=\frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{1-i}\right)}\quad (1)$$

$\left|-\frac{z-1}{1-i}\right|=\frac{|z-1|}{|1-i|}=\frac{|z-1|}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$. Αρα

$$(1)\; -\frac{1}{1-i}\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{(z-1)^\nu}{(1-i)^\nu} = -\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1-i)^{\nu+1}}(z-1)^\nu \qquad \frac{(-1)^\nu}{(1-i)^\nu}=\frac{-1}{1-i}=\frac{1}{(i-1)}$$

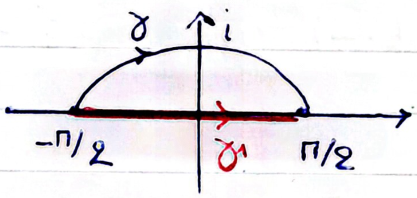
Αρα $f(z)=\dfrac{1}{z^2-iz}=-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-i}=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^{\nu+1}(z-1)^\nu-\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{(i-1)^{\nu+1}}(z-1)^\nu$

- <u>παράδειγμα 6.5.1 σελ.191</u> Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z)=\sin^2 z$ κατα μηκο[ς] της καμπυλης με παρασταση παραμετρικη $z(t)=t+i\cos t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

<u>Λυση</u>

$z(t)=\underset{x}{t}+i\underset{y}{\cos t}$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$y=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



$z\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$z\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\gamma_1: z(t)=t,\; t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

οποτε $\gamma_1-\gamma$ κλειστη κατα τμηματα διαφορισιμη

f: ολόμορφη

$\displaystyle\int_{\gamma_1-\gamma} f(z)\,dz=0$ $\qquad \displaystyle\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_{\gamma_1}\sin^2 z\,dz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\,d[t]$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

<u>σελ.203 παραδειγμα 6.8.1</u>: Εστω γ ο θετικος προσανατο[λισ]μενος μοναδιαίος κύκλος και f μια μιγαδική συν[αρτηση] οριομένη & ολόμορφη σε μια περιοχη της γ. Νδο

$$\int_\gamma \frac{f''(z)}{z^3}\,dz=12\int_\gamma\frac{f(z)}{z^5}\,dz.$$

<u>Λυση</u>

γ: απλή κλειστη κατα τμήματα διαφορισιμη

0 ομοτοπική

$$\boxed{g^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz,\;\; \zeta\in \text{εσωτ.}\gamma}$$